تحليل عقدي ١ — كلية العلوم
السنة الثالثة ف ١ — قسم الرياضيات
م ١٠ - 2017
المحاضرة الثانية / نظري

مقياس العدد العقدي:

ليكن لدينا العدد العقدي $z = x + iy$ ندعو بالتعريف
العدد غير سالب $\sqrt{x^2 + y^2}$ بمقياس أو
طويلة العدد العقدي z ونرمز للمقياس بالرمز
$|z|$ أي أن:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d((x,y), 0) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ونعلم من الهندسة التحليلية بأن المقدار
$\sqrt{x^2 + y^2}$ يمثل البعد بين النقطتين $(0,0)$ و (x,y)
مما يعني بأن المقياس $|z|$ يمثل طول المتجه الذي يناظر
العدد العقدي $z = x + iy$

* اذا كان لدينا العددان العقديان:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$$

وبالتالي فإن:
مقياس العدد العقدي $z_2 - z_1$ يعطى بالعلاقة:

$$|Z_2 - Z_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

ونعلم بأن الطرف الأيمن من العلاقة (١) السابقة يمثل دستور البعد بين النقطتين (x_2, y_2) و (x_1, y_1) هذا يعني بأن مقياس العدد العقدي $Z_2 - Z_1$ يمثل البعد بين النقطتين المتناظرتين بين العددين العقديين وبالتحقيق نجد أن:

$$Re Z = x \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

مثلاً:

$$Z = 2 + 3i$$

$$2 \leq |Z| \leq \sqrt{13}$$

أي أن:

$$Re Z \leq |Re Z| \leq |Z|$$

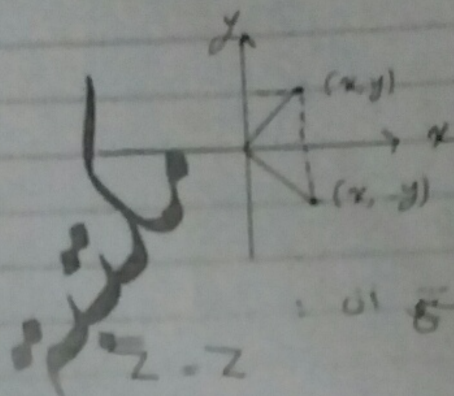
$$Im Z \leq |Im Z| \leq |Z|$$

إذا كان لدينا العدد العقدي $Z = x + iy$ عندئذٍ ندعو بالمرافق العدد العقدي $x - iy$ بالعدد المرافق للعدد العقدي Z ونرمز له بالرمز $\bar{Z}$ أي:

$$\bar{Z} = x - iy$$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية
حمص / النفق الرئيسي لجامعة البعث /
تجليد (مفتوح - نظامي)

مما سبق نستنتج أن المرافق هو انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي



مما سبق نستنتج أن:

$$\bar{\bar{z}} = z$$

كما أن مقياس

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

ويمكن إثبات بسهولة على صحة ما يلي:

① $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

$$z_1+z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$$
$$\overline{z_1+z_2} = (x_1+x_2) - i(y_1+y_2)$$
$$= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2$$
$$= \bar{z}_1+\bar{z}_2$$

② $\overline{(z_1 . z_2)} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

③ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; $z_2 \neq 0$

• كما أن : $Re\,z = \frac{z + \bar{z}}{2}$

• $Im\,z = \frac{z - \bar{z}}{2}$

فرضاً $z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$\Rightarrow z + \bar{z} = 2x \Rightarrow x = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$\Rightarrow z - \bar{z} = 2iy \Rightarrow y = \frac{z - \bar{z}}{2}$

• $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

حيث :

$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy)$

$= x^2 + y^2 + i(-xy + xy)$

$= x^2 + y^2 = |z|^2$

ملاحظة :

لإيجاد ناتج قسمة عددين عقديين نضرب البسط و المقام بمرافق المقام

مثال: اوجد ناتج الكسر:

$$\frac{1+i}{1-i}$$

$$\Rightarrow \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1-1+2i}{1+1}=i$$

لنثبت الآن صحة العلاقة التالية:

① $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

② $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

③ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

④ $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

البرهان:

① $|z_1 . z_2|^2 = (z_1 . z_2)(\overline{z_1 . z_2})$

وذلك بالاعتماد على $z . \bar{z} = |z|^2$

$= z_1 . z_2 . \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

$= z_1 . \bar{z}_1 . z_2 \bar{z}_2$

$= |z_1|^2 . |z_2|^2$

$= (|z_1| . |z_2|)^2$

أخذ التربيع للطرفين نجد أن:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

② نضرب البسط والمقام بالمرافق نجد أن:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)^2$$

③ $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})$

$= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$

$= z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$

$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2$

لكن نعلم أن

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$$

$\Rightarrow z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}$

$= 2\,\mathrm{Re}\,z_1 \cdot \bar{z}_2$

وباستخدام المتراجحة

$\mathrm{Re}\,z \leq |z|$

$2\,\mathrm{Re}\,z_1\bar{z}_2 \leq 2|z_1 \cdot \bar{z}_2|$

$= 2|z_1|\,|\bar{z}_2| = 2|z_1|\,|z_2|$

وبالتعويض نجد أن :

$$|z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي ⟸

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

(18) $z_1 = z_1 - z_2 + z_2$

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2|$$

وبالاستفادة من المتراجحة المثلثية السابقة نجد أن :

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$$

ومنه فإن :

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \quad \text{......} \quad (1)$$

وبشكل مماثل :

$$z_2 = z_2 - z_1 + z_1$$

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1|$$

ومنه فإن :

$$|z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1|$$

• $|z_1 - z_2| = |-(z_2 - z_1)| = |-1(z_2 - z_1)|$

$$= |-1||z_2 - z_1| = |z_2 - z_1|$$

ومنه :

ومنه فإن :

$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$ ... ②

من ① و ② ينتج المطلوب

يمكن تعميم المتراجحة المثلثية بالشكل الآتي

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

...

مكتبة تشرين